Παράδειγμα:

Στο $A=\mathbb{Z}$ ορίζουμε σχέση $kRl \Leftrightarrow k-l$ διαιρείται του n

Είναι σχέση ισοδυναμίας;

ΛΥΣΗ

1) $(\forall k\in\mathbb{Z})$: $kRk \Rightarrow k-k=0$ διαιρείται του n

2) Αν $kRl \Rightarrow lRk$

$$\underset{\Downarrow}{kRl}$$

$k-l=mn \Rightarrow l-k=m'\cdot n$ οπου $m'=-m$ ισχυει

3) Αν kRl και $lRv \Rightarrow kRv$

$k-l=mn$ $\quad l-v=m'n \Rightarrow k-l+l-v=(m+m')\cdot n$

Άρα, $k-v=(m+m')n \Rightarrow n$ διαιρει $k-v \Leftrightarrow kRv$

Επομενως, είναι σχέση ισοδυναμιας

Κλάσεις ισοδυναμίας για τη σχέση $kRl \Leftrightarrow n/k-l$ στο $\mathbb{Z}$

$\bar{0}=\{k \,/\, 0Rk\}=\{nk \,/\, k\in\mathbb{Z}\}=n\cdot\mathbb{Z}$

γιατί $0-k=-k$ οπου $n/-k \Leftrightarrow n/k$

$\bar{1} = \{ l \mid 1 R l \} = \{ nk+1 \mid l \in \mathbb{Z} \} = n\mathbb{Z}+1$

γιατί $n \mid l-1 \iff l-1 = k \cdot n \iff l = k \cdot n + 1$

όμοια

$\bar{2} = n \cdot \mathbb{Z} + 2$

$\overline{(n-1)} = n \cdot \mathbb{Z} + (n-1)$

Άρα, οι κλάσεις ισοδυναμίας ως προς αυτή τη σχέση είναι ακριβώς όσα και τα υπόλοιπα δια n.

$$(\forall r \in \mathbb{Z}) \quad \left.\begin{array}{l} r = n \cdot \pi + u \\ 0 \le u \le n-1 \end{array}\right\} \Rightarrow r \in \bar{u} = n\mathbb{Z} + u$$

Το $\mathbb{Z}$ "σπάει" σε κομμάτια ισοδυναμία ως προς τη σχέση n. Δηλαδή:

$\mathbb{Z} = \bar{0} \sqcup \bar{1} \sqcup \bar{2} \sqcup \dots \sqcup \overline{(n-1)}$

$\mathbb{Z}_n = \{$ κλάσεις ισοδυναμίας ως προς $n \} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{(n-1)} \}$

Πχ

$(\mathbb{Z}, +)$ και $\mathbb{Z}$ με τη σχέση modulo n

$\mathbb{Z}$ με τη σχέση δίνει $\mathbb{Z}_n = \{ \bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{(n-1)} \}$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$(a,b) \mapsto a+b$

$aRb \iff a-b$ διαιρείται με το $n \iff n \mid a-b \iff$ τα a και b ισοϋπόλοιπα.

Πρέπει: $(a+c) R (b+c) \iff a+c-(b+c) = a-b =$ $=$ πολ n. Άρα, η πράξη είναι συμβιβαστή και άρα μπορούμε να ορίσουμε αντίστοιχη πράξη μεταξύ των κλάσεων ισοδυναμίας:

$\bar{a} \oplus \bar{b} := \overline{a+b}$ Είναι καλά ορισμένη η πράξη αυτή; Δηλαδή, αν $\bar{a} = \bar{a'}$ και $\bar{b} = \bar{b'}$ τότε $\overline{(a+b)} = \overline{(a'+b')}$ όπου ισχύει. Το ίδιο και για το γινόμενο

Στο $\mathbb{N}$ έχουμε δύο πράξεις : $+, \cdot$
Στο $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ορίσαμε μία σχέση ισοδυναμίας η οποία μας όρισε το $\mathbb{Z}$ σαν κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης. Πρέπει νδο οι πράξεις του $\mathbb{N}$ κληρονομούνται από το $\mathbb{Z}$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$

$(a,b)\longmapsto a+b$

$(a,b)\longmapsto a\cdot b$

Όπου, $\mathbb{Z}=\{\overline{(k,0)},\overline{(0,\ell)}\,/\,k,\ell\in\mathbb{N}\}$

Ορισμός: Έστω A σύνολο και $\square$ μία πράξη στο σύνολο A :

1) Αν για την $\square$ ισχύει ότι είναι προσεταιριστική το ζεύγος $(A,\square)$ θα καλείται ημιομάδα
2) Αν επιπλέον υπάρχει στοιχείο e ώστε να αποτελεί μοναδιαίο ή ουδέτερο για την $\square$. ($a\square e=e\square a=a$ $\forall a\in A$) τότε το $(A,\square)$ καλείται μονοειδές
3) Αν επιπλέον $\forall a\in A$, $\exists a'\in A$ (με $a\square a'=a'\square a=e$), τότε το $(A,\square)$ καλείται ομάδα
4) Αν επιπλέον $\forall a,b\in A$ ισχύει $a\square b=b\square a$, τότε το $(A,\square)$ θα καλείται αβελιανή ομάδα

Εάν $(A,\square)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα, θα γράφουμε $(A,+)$ και εάν $(A,\square)$ δεν είναι αβελιανή, τότε θα γράφουμε $(A,\cdot)=(G,\cdot)$

Τώρα, εάν το A είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $\square$ και $\boxdot$ που συνδέονται μεταξύ τους, θα λέμε ότι ισχύει η επιμεριστικότητα, αν :

$a\boxdot(b\square c)=a\boxdot b\,\square\,a\boxdot c$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: 1) Αν $(G,\circ)$ είναι ομάδα, τότε το μοναδιαίο και ο αντίθετος-αντίστροφος είναι μοναδικό

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι η G έχει δύο (ουδέτερα μοναδιαία) e & e'

Άρα, $e = e\cdot e' = e' \rightsquigarrow e = e'$

Έστω ότι το a έχει δύο (αντίστροφα)

$a\cdot b = b\cdot a = e = a\cdot b' = b'\cdot a$ και ΘΔΟ $b = b'$

αλλά $b = b\cdot e = b(a\cdot b') = (b\cdot a)b' = e\cdot b' = b' \rightsquigarrow b = b'$

Πρόταση: Έστω $(G,\cdot)$ ημιομάδα η οποία έχει αριστερό (ουδέτερο-μοναδιαίο) και για κάθε στοιχείο αριστερό αντίστροφο. Τότε είναι ομάδα

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$(G,\cdot)$ ομάδα $\Leftrightarrow$

1) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

2) $(\exists e\in G)$ ώστε $e\cdot a = a\cdot e = a \quad \forall a\in G$

3) $(\forall a\in G)(\exists a'\in G)$ ώστε $a\cdot a' = a'\cdot a = e$

Αποδεικνύουμε τις ιδιότητες:

2) Θέλουμε $a\cdot e = a$. Το a έχει αριστερό αντίστροφο $\exists a'$ με $a'\cdot a = e$

Έχουμε, $a\cdot e = a \Rightarrow a'(a\cdot e) = a'\cdot a \Rightarrow e\cdot e = e$ ισχύει

Δείξαμε, $e\cdot a = a\cdot e = a, \ \forall a\in G$

αντίστροφο:

$e\cdot e = e \Rightarrow a'(ae) = a'\cdot a \Rightarrow a''(a'(ae)) = a''\cdot a'\cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow a\cdot e = a$

3) $a\cdot a' = e \Rightarrow a'\cdot(a\cdot a') = a'\cdot e \Rightarrow (a'\cdot a)\cdot a' = a' \Rightarrow e\cdot a' = a'$

$\Rightarrow a' = a'$ ισχύει.

Παράδειγμα:

Στο $\mathbb{Z}$ ορίζουμε την πράξη

$a \square b = a \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$

Προσεταιριστικότητα: $\left.\begin{aligned} (a \square b) \square c = a \square c = a \\ a \square (b \square c) = a \square c = a \end{aligned}\right\}$ ίσα μέλη

Ουδέτερο Στοιχείο: Έχουμε ουδέτερο στοιχείο μόνο μόνο από τα δεξιά, αφού $a \square 1 = a$ και $1 \square a = 1$

Άρα, δεν αποτελεί ομάδα